

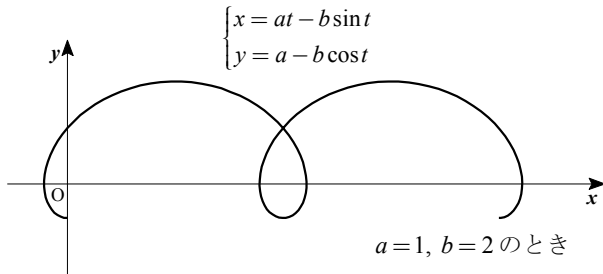


# いろいろな曲線の確認

★ いろいろな曲線の代表的なものを確認しておこう。

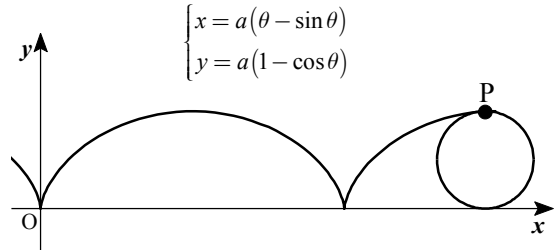
## トコロイド trochoid

余擺線とも。半径  $a$  の円が  $x$  軸上を滑らずに転がるとき、円の周上の定点  $P$  の描く曲線。エピトコロイド、ハイポトコロイドも各サイクロイドのものにつながる。



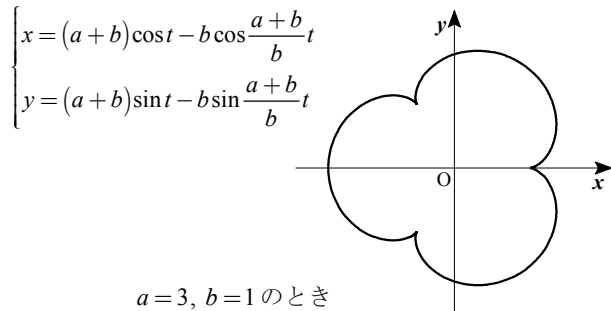
## サイクロイド cycloid

半径  $a$  の円が  $x$  軸上を滑らずに転がるとき、円の周上の定点  $P$  の描く曲線。トコロイドの  $a=b$  のときと見ることができる。



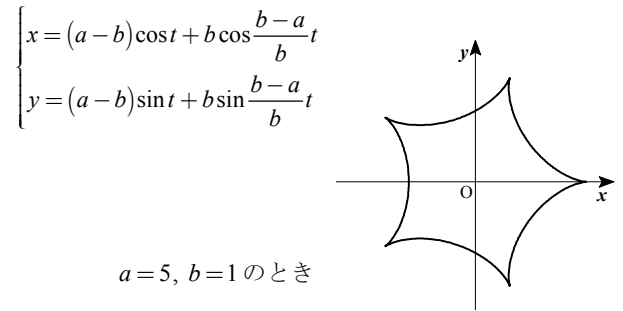
## エピサイクロイド epicycloid

外サイクロイドや外擺線とも。半径  $a$  の円が定円を滑らずに転がるとき、円の周上の定点  $P$  の描く曲線



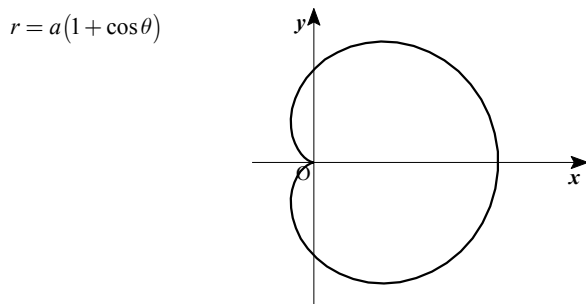
## ハイポサイクロイド hypocycloid

内サイクロイドや内擺線とも。半径  $a$  の円が定円を滑らずに転がるとき、円の周上の定点  $P$  の描く曲線



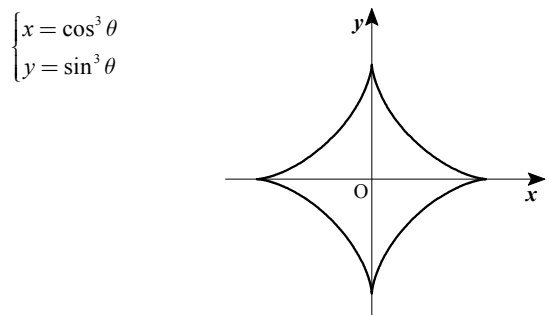
## カージオイド cardioid

心臓形とも。エピサイクロイドの  $a=b=1$  の場合である。またパスカルの蝸牛形の  $a=b$  と見ることができる。



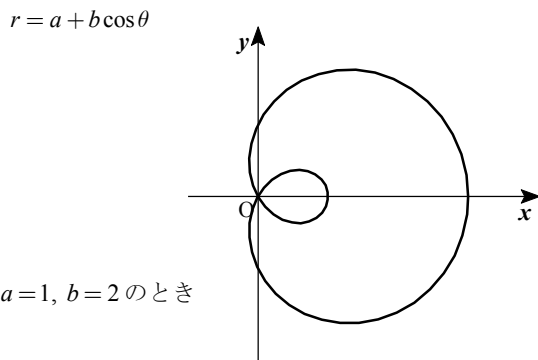
## アステロイド astroid

星芒形、星形とも。ハイポサイクロイドで  $a=1, b=\frac{1}{4}$  とおき、3倍角の公式を用いると導かれる。



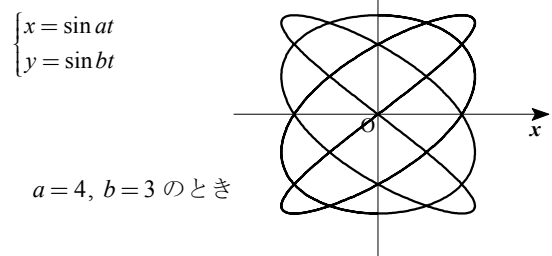
## パスカルの蝸牛形 Limason de Pascal

リマソンとも。  $x$  軸に対して線対称な図形である。



## リサーチュ Lissajous

リサージュやボウディッチ曲線とも。周波数の測定に用いられることが多く、オシロスコープで観測することもできる。

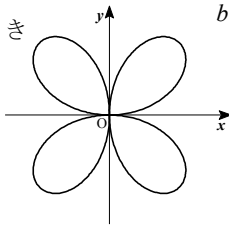


### バラ曲線 Rose Curve

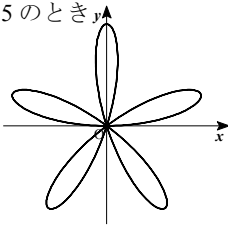
正葉線、正葉曲線とも。バラに似た形のため、このように名付けられた。下の式で  $b$  が偶数のとき  $2b$  個のループから、 $b$  が奇数のとき  $b$  個のループからなる。

$$r = a \sin b\theta$$

$b = 2$  のとき



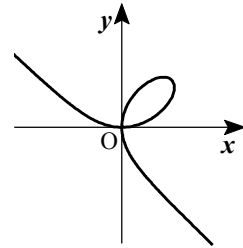
$b = 5$  のとき



### デカルトの正葉線 folium of Descartes

原点  $O$  で自らと交わる。 $y = -x - a$  を漸近線に持つ。ループで囲まれる面積は  $S = \frac{3a^2}{2}$  である。

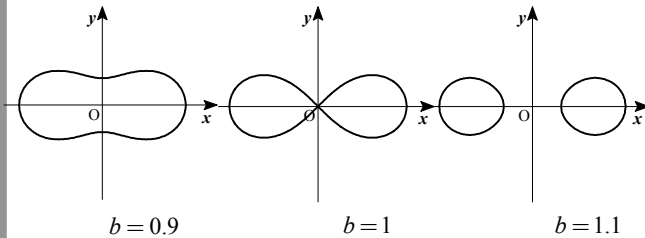
$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$



### カッシーニの卵形線 Cassinian oval

$a < b$  のとき 2 つの丸いループ、 $a = b$  のときレムにスケート、 $a > 0$  のとき 1 つのループからなる。

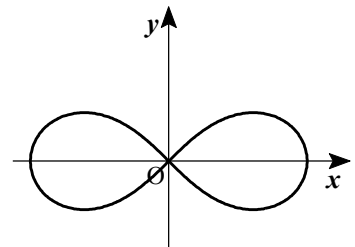
$$(x^2 + y^2)^2 - 2b^2(x^2 - y^2) - (a^4 - b^4) = 0$$



### レムニスケート lemniscate

連珠形、ヤコブ・ベルヌーイのレムニスケートとも。カッシーニの卵形線の  $a = b$  とみることができ。ベルヌーイ兄弟によって最初に発見され、イタリアの数学者ファニャーノによって楕円積分論の事例として詳しく研究された。

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$$



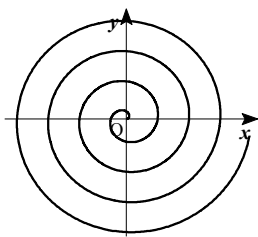
### 代数螺旋

代数的な式によって表される螺旋で、対数螺旋は含まない。

#### アルキメデスの螺旋 Archimedes' spiral

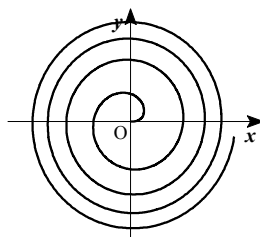
等間隔の渦巻。

$$r = a\theta$$



#### 放物螺旋 Parabolic Spiral

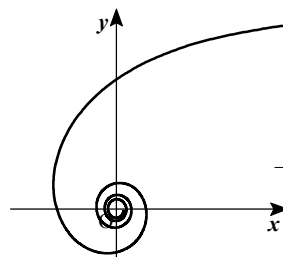
渦は外側にいくほど ( $\theta$  が大きくなるほど) 間隔が狭くなっていく。  $r = a\sqrt{\theta}$



#### 放物螺旋 Parabolic Spiral

$y = a$  を漸近線にもつ螺旋

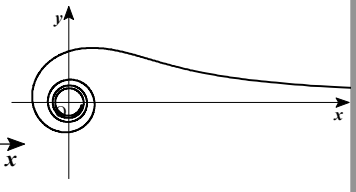
$$r = \frac{a}{\theta}$$



#### 放物螺旋 Parabolic Spiral

$\theta$  が大きくなるにつれて、原点に近づく螺旋

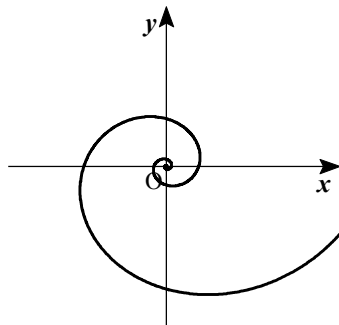
$$r = \frac{a}{\sqrt{\theta}}$$



### 対数螺旋 logarithmic spiral

等角螺旋 (equiangular spiral) やベルヌーイの螺旋とも。自然界によく見られる螺旋の一種である。

$$r = ae^{b\theta}$$

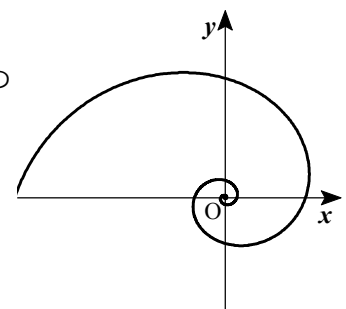


### 黄金螺旋 golden spiral

黄金比  $\varphi$  に関連した対数螺旋の一種。

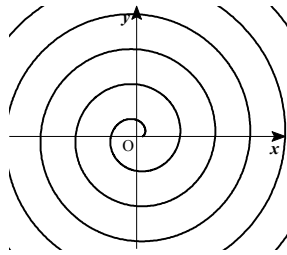
$$|b| = \frac{\log \varphi}{\frac{\pi}{2}} \approx 0.30634896253 \text{ なる定数 } b \text{ に対して}$$

$r = e^{b\theta}$  で与えられるもの



### インボリュート曲線 logarithmic spiral

円の伸開線 (involute of circle) とも。定円に糸を巻きつけ、その定円自体は回転させず固定したまま、ほどかれた部分が直線を保つように張りながらその糸をほどくとき、その糸の先端が描く曲線である歯車の多くがインボリュート曲線を歯型とするインボリュート歯車として作られている。

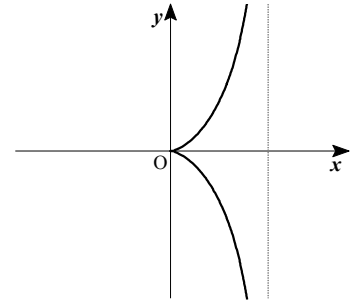


$$\begin{cases} x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta) \\ y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta) \end{cases}$$

### シッソイド cissoid

音訳から疾走線とも。  $x = a$  を漸近線として持つ。

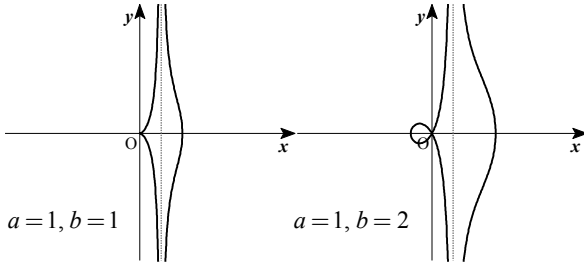
$$x^3 + (x-a)y^2 = 0$$



### コンコイド conchoid

ニコメデスのコンコイドとも。  $x = a$  を漸近線として持つ。

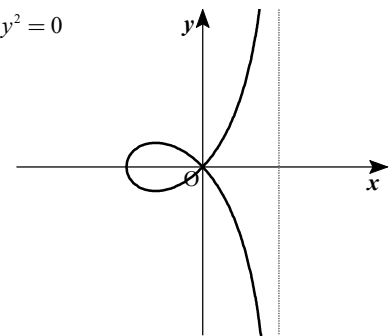
$$(x-a)^2(x^2+y^2) - b^2x^2 = 0$$



### ストロフォイド strophoid

葉形線とも。  $x = a$  を漸近線として持つ。

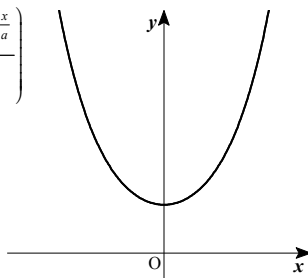
$$(x+a)x^3 + (x-a)y^2 = 0$$



### カテナリー曲線 catenary

懸垂曲線や懸垂線とも。ロープや電線などの両端を持って垂らしたときにできる曲線を表す。力学的にも安定しているの、建築物や橋梁にも用いられる。

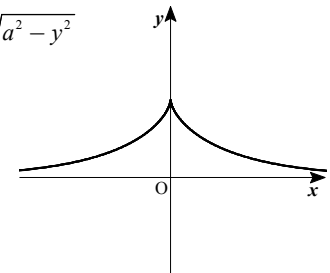
$$y = a \cosh \frac{x}{a} = a \left( \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2} \right)$$



### トラクトリックス tractrix

けん引線とも。カテナリーの伸開線であり、 $x$  軸を漸近線として持つ。

$$x = a \log \frac{a \pm \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \mp \sqrt{a^2 - y^2}$$



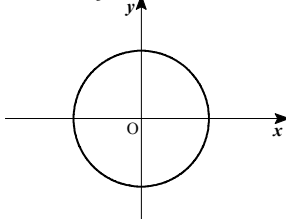
### 円錐曲線 conic curve

円錐面を任意の平面で切断したときの断面としてえられる曲線群の総称。

#### 円 Archimedes' spiral

全ての母線と交わり、底面に平行な平面で切断。

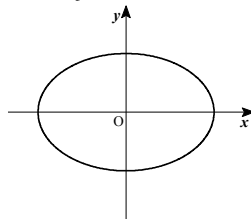
$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}$$



#### 楕円 ellipse

全ての母線と交わり、底面に平行でない平面で切断。

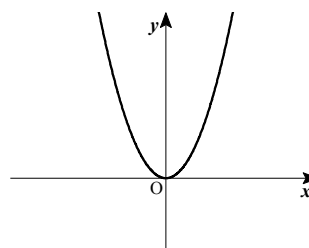
$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$



#### 放物線 parabola

母線に平行な面で切断。

$$\begin{cases} x = t \\ y = at^2 + bt + c \end{cases}$$



#### 双曲線 hyperbola

母線に平行でない平面で切断。

$$\begin{cases} x = \pm a \cosh t \\ y = b \sinh t \end{cases}$$

